第37講　3次方程式の解の公式について

37　次の各問いに答えよ.

(1)　i を虚数単位として $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とするとき,

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$ が成り立つことを示せ.

(2)　$y^3+z^3=2$ かつ $yz=-2$ を満たす実数 y と z を求めよ.

(3)　方程式 $x^3+6x+2=0$ の解を求めよ.

(4)　方程式 $x^3+6x^2+3x+2=0$ の解を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 37 講　3 次方程式の解の公式について

37　x の 3 次方程式 $x^3+3x^2-9x+9=0$ を解け.

【選択肢】

㋐　$x=-2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$, $\dfrac{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\dfrac{(-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2}i$

㋑　$x=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$, $\dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\dfrac{(-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2}i$

㋒　$x=-1-2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$, $\dfrac{-2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\dfrac{(2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2}i$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 37 講　3 次方程式の解の公式について

37　次の各問いに答えよ．

(1)　i を虚数単位として $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とするとき，

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$ が成り立つことを示せ．

(2)　$y^3+z^3=2$ かつ $yz=-2$ を満たす実数 y と z を求めよ．

(3)　方程式 $x^3+6x+2=0$ の解を求めよ．

(4)　方程式 $x^3+6x^2+3x+2=0$ の解を求めよ．

【答】　(1) 略　(2) $(y,\ z)=(-\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4}),\ (\sqrt[3]{4},\ -\sqrt[3]{2})$

(3) $x=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},\ \dfrac{-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\dfrac{(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2}i$

(4) $x=-2-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9},\ \dfrac{-4+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{2}\pm\dfrac{(-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})\sqrt{3}}{2}i$

【解答】

(1)　$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ のとき $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ より $\omega^2+\omega=-1$ が成り立ち，また

$\omega^3=\omega\times\omega^2=1$ が成り立つ．

ここで

$$\begin{aligned}&(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)\\&=x^2+\omega^2 xy+\omega zx+\omega xy+\omega^3 y^2+\omega^2 yz+\omega^2 zx+\omega^4 yz+\omega^3 z^2\\&=x^2+\omega^3 y^2+\omega^3 z^2+(\omega^2+\omega)xy+(\omega^2+\omega^4)yz+(\omega+\omega^2)zx\\&=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}&(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)\\&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\\&=x^3+y^3+z^3-3xyz\end{aligned}$$

(2)　$yz=-2$ より $y^3z^3=-8$ これと $y^3+z^3=2$ より y^3 と z^3 は $X^2-2X-8=0$ すなわち $(X-4)(X+2)=0$ の 2 つの解となるので，$(y^3,\ z^3)=(-2,\ 4),\ (4,\ -2)$

$y,\ z$ は実数であるので

$$\boldsymbol{(y,\ z)=(-\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4}),\ (\sqrt[3]{4},\ -\sqrt[3]{2})}$$

(3)　(1)の結果に $(y,\ z)=(-\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{4})$ を代入すると

$$x^3+6x+2=(x-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})(x-\sqrt[3]{2}\,\omega+\sqrt[3]{4}\,\omega^2)(x-\sqrt[3]{2}\,\omega^2+\sqrt[3]{4}\,\omega)$$

となるので，$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ と $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ より，$x^3+6x+2=0$ の解は

$$\boldsymbol{x=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},\ \dfrac{-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\dfrac{(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2}i}$$

(4)　$x^3+6x^2+3x+2=0$ において $x=t-2$ とおくと $t^3-9t+12=0$ となる．

(1)の結果に $x=t,\ y=\sqrt[3]{3},\ z=\sqrt[3]{9}$ とおくことで $x^3+y^3+z^3-3xyz=t^3-9t+12$ と

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

なるので,

$t^3-9t+12=0$ の解は

$$t=-y-z,\ \ -\omega y-\omega^2 z,\ \ -\omega^2 y-\omega z$$

となる．この結果と $x=t-2$ より

$$\boldsymbol{x=-2-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9},\ \ \frac{-4+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{2}\pm\frac{(-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})\sqrt{3}}{2}i}$$

を得る．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 37 講　3 次方程式の解の公式について

37　x の 3 次方程式 $x^3+3x^2-9x+9=0$ を解け．

【選択肢】

㋐　$x=-2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},\ \dfrac{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\dfrac{(-2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2}i$

㋑　$x=-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},\ \dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\dfrac{(-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2}i$

㋒　$x=-1-2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},\ \dfrac{-2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\dfrac{(2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2}i$

【答】 ㋒

【解答】

$x^3+3x^2-9x+9=0$ において $x=t-1$ とおくと $x^3+3x^2-9x+9=t^3-12t+20=0$ となる．

ここで $t^3+u^3+v^3-3tuv=(t+u+v)(t^2+u^2+v^2-tu-uv-vt)$ において $u=2\sqrt[3]{2}$，$v=\sqrt[3]{4}$ とおくと，$t^3+u^3+v^3-3tuv=t^3-12t+20$ であるので，$t^3-12t+20=0$ は $(t+u+v)(t^2+u^2+v^2-tu-uv-vt)=0$ となり，これを t について解くと

$$\begin{aligned} t&=-u-v,\ \frac{u+v\pm\sqrt{(u+v)^2-4(u^2+v^2-uv)}}{2}\\ &=-u-v,\ \frac{u+v\pm\sqrt{-3(u-v)^2}}{2}\\ &=-u-v,\ \frac{u+v\pm(u-v)\sqrt{3}\,i}{2}\end{aligned}$$

となる．この結果と $x=t-1$ より

$$x=-1-u-v,\ \frac{-2+u+v\pm(u-v)\sqrt{3}\,i}{2}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{x=-1-2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4},\ \frac{-2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\pm\frac{(2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4})\sqrt{3}}{2}i}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。